EX 15 : n≥2

$f_n(x) = x^n + x^{n-1} + ... + x - 1$

1) $f_n'(x) = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + ... + 2x + 1$

$f_n'(x) > 0$; $\forall x \in [0,1]$

f_n est continue et strictement croissante sur $[0,1]$

elle réalise donc une bijection de $[0,1]$ sur $f_n([0,1])$

$f_n([0,1]) = [f_n(0), f_n(1)] = [-1, n-1]$

2) a) f_n est une bijection de $[0,1]$ sur $[-1,n-1]$

comme $0 \in [-1,n-1]$, alors il existe un unique

réel $\alpha_n \in [0,1]$ tel que: $f_n(\alpha_n)=0$

$f_n(0) \times f_n(1) = 1-n < 0 \Rightarrow 0 < \alpha_n < 1$

b) pour $x \neq 1$

$x^n + x^{n-1} + ... + x = x.(\frac{1-x^n}{1-x})$ comme étant somme de

n termes consécutifsd'une suite géometrique de raison x

$f_n(\alpha_n) = 0 \Leftrightarrow \alpha_n(\frac{1-\alpha_n^{\,n}}{1-\alpha_n}) - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha_n(1-\alpha_n^{\,n}) = 1-\alpha_n$

$\Leftrightarrow \alpha_n - \alpha_n^{\,n+1} = 1-\alpha_n \Leftrightarrow \alpha_n^{\,n+1} = 2\alpha_n - 1$

3) a) on a : $f_{n+1}(x) = f_n(x) + x^{n+1}$

$f_n(\alpha_n) = 0$

$f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0 = f_n(\alpha_n)$

$\Rightarrow f_{n+1}(\alpha_{n+1}) + \alpha_{n+1}^{n+1} = f_n(\alpha_n)$

$\Rightarrow f_{n+1}(\alpha_{n+1}) \leq f_n(\alpha_n)$ car $\alpha_{n+1} \geq 0$

$\Rightarrow \alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ car f_n *est* strictement croissante

par suite (α_n) est décroissante

b) * (α_n) est décroissante et minorée par 0

elle est donc convergente

* $\alpha_n \geq 0$

$\Rightarrow (\alpha_n)^{n+1} \geq 0$

$\Rightarrow 2\alpha_n - 1 \geq 0$ (1)

déterminons α_2 ?

$f_2(x)=0 \Leftrightarrow x^2+x-1=0$ avec $x \in [0,1]$

$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

$\alpha_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

(α_n) est décroissante d'où pour $n \geq 2 \Rightarrow \alpha_n \leq \alpha_2$

$\Rightarrow \alpha_n \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow (\alpha_n)^{n+1} \leq (\frac{\sqrt{5}-1}{2})^{n+1}$

$\Rightarrow 2\alpha_n - 1 \leq (\frac{\sqrt{5}-1}{2})^{n+1}$ (2)

(1) + (2) $\Rightarrow 0 \leq 2\alpha_n - 1 \leq (\frac{\sqrt{5}-1}{2})^{n+1}$

$\lim_{n\to+\infty} (\frac{\sqrt{5}-1}{2})^{n+1} = 0$ car $-1 < \frac{\sqrt{5}-1}{2} < 1$

d'où $\lim_{n\to+\infty} (2\alpha_n - 1) = 0$

$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \frac{1}{2}$

EX 16 :

A/

$f(x) = -x + \sqrt{x^2+8}$

1) a)

* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+8} - x) = +\infty$

* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+8} - x)$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{8}{\sqrt{x^2+8}+x} = 0$

* $\lim_{x\to-\infty} (f(x)+2x) = \lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+8}+x)$

$= \lim_{x\to-\infty} \frac{8}{\sqrt{x^2+8}-x} = 0$

b) * $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

(ζ_f) admet la droite d'équation : y=0

comme asymptote au voisinage de $(+\infty)$

* $\lim_{x\to-\infty} (f(x)+2x) = 0$

$\Delta : y = -2x$ est une asymptote à (ζ_f) au voisinage

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn